פרק ח': תחשיב היחסים – תחביר וסמנטיקה

בתחשיב הפסוקים יכולנו לבחור גירסאות שונות של התחשיב, למשל גירסה בה סימן האימום $\leftrightarrow$ הוא אחד מסימני הקשרים היסודיים, או גירסה בה $\leftrightarrow$ אינו מופיע בשפה. ראינו שם שהבחירה בין גירסה אחת כזאת לבין חברתה אינה חשובה כי היא אינה משנה את אפשרויות ההבעה של תחשיב הפסוקים. גם בתחשיב היחסים יש גירסאות מספר שההבדלים ביניהן אינם משנים את כוח ההבעה של השפה ולכן הם אינם חשובים, אולם השפה הזאת מתחלקת לשתי שפות בסיסיות שהן שונות לגמרי מבחינת כוח ההבעה שלהן. השפה הבסיסית החשובה מבין השתיים היא **תחשיב היחסים מסדר ראשון** first order predicate calculus והשנייה היא **תחשיב היחסים מסדר שני** second order predicate calculus. ההבדלים בין שתי שפות אלו יתבררו לנו בהמשך. בשלב זה נאמר רק שחשיבותו של התחשיב מסדר ראשון היא שהוא עוסק באותם עניינים בהם כוחה של הלוגיקה גדול, בעוד שהתחשיב מסדר שני עוסק בעניינים שבהם מטפלת תורת הקבוצות ובמקרים רבים אין ללוגיקה מה להוסיף לטיפול זה. לכן כל מה שנאמר בהמשך יתייחס לתחשיב מסדר ראשון, אלא אם נאמר במפורש אחרת.

8.1 שפת תחשיב היחסים. שפת תחשיב היחסים היא שפה המדברת על מבנה $\mathcal{A}$ שהוא מורכב מקבוצה A, מאיברים קבועים של A, מפעולות n-מקומיות על A ומיחסים n-מקומיים על A, ל- $n \geq 0$.

נפרט עתה את סוגי הסימנים של תחשיב היחסים.

א. סימנים אישיים. אלו סימנים המסמנים איברים של הקבוצה A. ישנם שני סוגים של סימנים אישיים: **משתנים אישיים** (individual variables), המסמנים איברים לא מסויימים של A. אנו מסמנים את המשתנים האישיים באותיות $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$, בלי או עם אינדקסים.

קבועים אישיים (individual constants), המסמנים איברים מסויימים בקבוצה A. אנו מסמנים את הקבועים האישיים באותיות $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$.

ב. סימני יחסים n-מקומיים לכל n טבעי. סימן יחס n-מקומי מסמן יחס n-מקומי על A. כאשר אנו בוחרים לראות ביחס כזה פונקציה שתחומה הוא קבוצת ה-n-יות של איברי A וערכיה הם ערכי האמת T ו-F. לכל סימן יחס R יש מספר מקומות n יחיד, כלומר אותו סימן יחס אינו יכול להיות גם n-מקומי וגם m-מקומי עם $m \neq n$. בתחשיב מסדר ראשון כל סימני היחס מסמנים יחסים הנתונים ע"י המבנה ולכן אפשר גם לקרוא להם **קבועי יחסים**. אנו מסמנים את קבועי היחסים באותיות $\mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{R}$. בין קבועי היחסים ישנו קבוע יחס דו-מקומי מיוחד $\approx$ הנקרא **קבוע השיוויון** והוא מסמן את היחס הדו-מקומי של הזהות על A. אפשר לכלול, או לא לכלול, בשפה קבועי יחס 0-מקומיים, וזה אינו משנה את כוח ההבעה של השפה. קבועי היחס בהם אנו נעסוק יהיו, כל עוד לא נאמר אחרת, 1-מקומיים ומעלה.

ג. סימני פעולה n-מקומיים לכל n טבעי. סימן פעולה n-מקומי מסמן פעולה n-מקומית על A, כלומר פונקציה שתחומה הוא קבוצת ה-n-יות של איברי A וערכיה הם איברי A. לכל סימן פעולה G יש מספר מקומות n יחיד, כלומר אותו סימן יחס אינו יכול להיות גם n-מקומי וגם m-מקומי עם $m \neq n$. בתחשיב מסדר ראשון כל סימני הפעולה מסמנים את הפעולות הנתונות ע"י המבנה ולכן אפשר גם לקרוא להם **קבועי פעולה**. אנו מסמנים את קבועי הפעולה באותיות $\mathsf{G}, \mathsf{H}, \mathsf{J}$.

מן הדיון בהמשך יהיה ברור כי קבועי הפעולה ה-0-מקומיים מתפקדים בדיוק כמו הקבועים האישיים, ולכן אנו זקוקים רק לאחד משני סוגי סימנים אלו. הטיפול בקבועי פעולה 0-מקומיים הוא יעיל יותר כי אפשר לטפל בהם במסגרת הטיפול בקבועי פעולה n-מקומיים וכמעט ואננו נדרשים להתייחס בנפרד למקרה $n = 0$. מצד שני השימוש בקבועים אישיים הוא יותר מוכר לנו מן השפה המתמטית המעשית, ולכן אנו נשתמש בקבועים אישיים, ונניח שקבועי הפעולה שלנו הם 1-מקומיים ומעלה.

סימני הקשרים: $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$.

ה. סימני הכמתים (quantifiers): $\forall$ שמשמעותו "לכל" ו-$\exists$ שמשמעותו "קיים".

ו. הסוגרים והפסיק.

8.2 השפה. ב-2.34 ראינו שיש שפות שונות של תחשיב הפסוקים, כאשר השפה נקבעת ע"י הקבוצה L של הפסוקים היסודיים שלה. גם בתחשיב היחסים יש שפות שונות, הנבדלות זו מזו בכך שקבוצות הקבועים, מן הסוגים השונים שמנינו לעיל, שונות בהן. כל השפות של תחשיב היחסים מכילות את הסוגריים והפסיק (אלא אם אנו משתמשים בכתיב הפולני) , את סימני הקשרים והכמתים, את אותה קבוצה של משתנים

אישיים ובדרך כלל את סימן השיוויון $\approx$. באותם מקרים מיוחדים בהם השפה אינה מכילה את סימן השיוויון השפה מכילה לפחות סימן יחס אחר כלשהו.

בניגוד לקבועים, הדרושים לשפה לסימון איברים, יחסים ופעולות מסויימים, כך שכל קבוע מסמן משהו מסויים, הרי המשתנים האישיים מסמנים איברים לא מסויימים של העולם ואין זה משנה אם אנו משתמשים לשם כך במשתנה אחד או במשתנה אחר מאותו סוג. מכיוון שהביטויים של השפה הם סדרות סופיות של סימנים, בכל ביטוי מופיע רק מספר סופי של משתנים, וכדי שנוכל להביע ביטויים בכל אורך ובכל מידת סיבוך אנו צריכים שלכל מספר טיבעי n יהיו בשפה לפחות n משתנים. לשם כך נניח שקיימת קבוצה בת מניה של משתנים אישיים.

באשר לקבועים מסוג כלשהו שפה יכולה להכיל מספר כלשהו של קבועים מסוג זה, החל באפס וכלה בעוצמה אינסופית כלשהי. למשל טבעי הוא ששפה העוסקת בשדות תכיל את סימן השוויון, שני קבועי פעולה דו-מקומיים עבור החיבור והכפל, שני קבועים אישיים עבור האיברים 0 ו-1 ואולי עוד שני קבועי פעולה נוספים עבור החיסור והחילוק, ואלו יהיו כל הקבועים שלה. הקבועים האישיים של שפה המשמשת עבור מבנה המספרים הממשיים יהיו בדרך כלל רק 0 ו-1, אולם לצרכים מיוחדים אנו עשויים להיות זקוקים לשפה המכילה קבוע אישי c_a לכל מספר ממשי a. בשפה כזאת מספר הקבועים האישיים לא רק שאינו סופי אלא גם אינו בן מניה.

מכיוון שהקבועים הם רכיבי השפה השונים משפה לשפה לכן נציין את השפות השונות של תחשיב היחסים באמצעות קבוצת הקבועים L של השפה ונקרא לשפה השפה L.

הביטויים בהם עסקנו בתחשיב הפסוקים היו הפסוקים, שהערכים שלהם הם ערכי אמת, כלומר, במבנה $\mathcal{A}$ נתון מקבל כל פסוק ערך שהוא T או F. בתחשיב היחסים יש שני סוגי ביטויים: ביטויים המקבלים ערכי אמת T או F, ביטויים אלו נקראים נוסחאות והם הביטויים בעלי החשיבות המרכזית בתחשיב היחסים, וביטויים המקבלים ערכים שהם איברי המבנה בו מדובר והם נקראים שמות עצם. בהגדרות הבאות אנו מגדירים את המושגים התחביריים הבסיסיים עבור שפה L, מבלי שנזכיר במפורש את ההתייחסות לשפה.

8.3 שם עצם (term). מושג זה מוגדר ע""י ההגדרה הסתומה הבאה.

א. כל סימן אישי, כלומר כל משתנה אישי וכל קבוע אישי, הוא שם עצם.

ב. אם $n \geq 1$, G הוא קבוע פעולה n-מקומי, ו- $t_1, \ldots, t_n$ הם שמות עצם אז גם $\mathsf{G}(t_1, \ldots, t_n)$ הוא שם עצם. כאשר $n = 2$ נהוג לכתוב $t_1 \mathsf{G} t_2$ במקום $\mathsf{G}(t_1, t_2)$.

ג. ביטוי הוא שם עצם רק אם הוא שם עצם לפי א'–ב'.

קל לעבור מהגדרה סתומה זאת להגדרה מפורשת ע"י שימוש במושג סידרת היצירה של שם עצם, בדומה ל-2.4 במהדורה זאת.

8.4 נוסחה אטומית (atomic formula) היא ביטוי בעל אחת הצורות הבאות.

$\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)$, כאשר $n \geq 1$, R הוא סימן יחס n-מקומי ו- $t_1, \ldots, t_n$ הם שמות עצם.

כאשר $n = 2$ נהוג לכתוב $t_1 \mathsf{R} t_2$ במקום $\mathsf{G}(t_1, t_2)$.

אם אנו כוללים בשפה גם קבועי יחס 0-מקומיים, אז גם כל קבוע יחס כזה הוא נוסחה אטומית.

8.5 נוסחה (formula). מושג זה מוגדר ע""י ההגדרה הסתומה הבאה.

א. כל נוסחה אטומית היא נוסחה.

ב. אם ϕ היא נוסחה אז גם $\neg\phi$ היא נוסחה.

ג. אם ϕ ו-ψ הן נוסחאות ו-$\square$ הוא קשר דו-מקומי בסיסי אז $\phi\square\psi$ היא נוסחה.

ד. אם ϕ היא נוסחה, Q כמת, כלומר Q הוא $\forall$ או $\exists$, ו-x משתנה, אז $\mathsf{Qx}\phi$ נוסחה.

ה. ביטוי הוא נוסחה רק אם הוא נוסחה לפי א'-ד'.

בכתיבת נוסחאות נשתמש בכל הקיצורים שהנהגנו ב-2.21.

נדון עתה בשאלה כיצד להבין הגדרה סתומה כזאת וכיצד להפוך אותה להגדרה מפורשת, ונשתמש בהגדרה 8.3 כדוגמה. המשמעות של חלקים א' ו-ב' היא ברורה, אולם מהי המשמעות של חלק ג'? יש להבין זאת כך שביטוי t הוא שם עצם רק אם הוא מתקבל מסימנים אישיים ע"י הפעלה, אולי חוזרת ונשנית, של הפעולות של ב'. זה אומר שאם t הוא שם עצם אז קיימת סידרה $t_1, \ldots, t_n$ שכל איבר שלה הוא סימן אישי או שהוא מתקבל מאיברים קודמים בסידרה ע"י הפעולה של ב', ושאחד מאיבריה הוא t. לסידרה

כזאת נקרא סידרת יצירה של שם עצם, וזה מוביל להגדרה מפורשת של מושג שם העצם.

8.6 הגדרה. א. **סידרת יצירה של שם עצם** זאת סידרה $t_1, \ldots, t_n$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$ t_i הוא סימן אישי או שקיימים $k \geq 1$, קבוע פעולה k-מקומי G ו- $1 \leq j_1, \ldots, j_k < i$ כך ש- $t_i = \mathsf{G}(t_{j_1}, \ldots, t_{j_k})$.

ב. מחרוזת היא **שם עצם** אם היא רכיב של סידרת יצירה של שם עצם כלשהי.

(ראה 2.4).

8.7 תרגיל. א. בצאתך מהגדרה 8.6 הוכח את 8.3א' ו-ב'.[ראה 2.6].

ב. **עקרון האינדוקציה לשמות עצם**. תהי **ת** תכונה כך שקיימים התנאים הבאים:

(i) כל סימן אישי הוא בעל התכונה **ת**,

(ii) לכל סימן פעולה k-מקומי G אם $t_1, \ldots, t_k$ הם בעלי התכונה **ת** אז גם $\mathsf{G}(t_1, \ldots, t_k)$ הוא בעל התכונה **ת**.

אז כל שם עצם הוא בעל התכונה **ת**. [ראה 2.8].

8.8 תרגיל. א. בצאתך מ-8.5 תן הגדרה מפורשת למושג הנוסחה.

ב. כאשר מושג הנוסחה מוגדר לפי א' הוכח את 8.5א' עד ג'.

ג. **עקרון האינדוקציה לנוסחאות**. תהי **ת** תכונה כך שקיימים התנאים הבאים:

(i) כל נוסחה אטומית היא בעלת התכונה **ת**,

(ii) אם ϕ היא בעלת התכונה **ת** אז גם $\neg\phi$ היא בעלת התכונה **ת**,

(iii) אם ϕ ו-ψ הן בעלות התכונה **ת** ו-$\Box$ קשר פסוקי יסודי אז גם $\phi\Box\psi$ היא בעלת התכונה **ת**,

(iv) אם ϕ היא בעלת התכונה **ת**, x משתנה ו-Q כמת אז גם $\mathsf{Qx}\phi$ היא בעלת התכונה **ת**.

אז כל נוסחה היא בעלת התכונה **ת**.

ד. בדומה להגדרה לתחשיב הפסוקים של מושג תת-הפסוק ב-2.23 באתר הגדר לתחשיב היחסים את מושג **תת הנוסחה**. שים לב לכך שעל ψ להיות תת-נוסחה של $\mathsf{Qx}\psi$. נסח והוכח את המשפט המקביל ל-2.23 א'-ז'.

8.9 הגדרה ותרגיל. תהי ϕ מחרוזת. נאמר ששפה L מתאימה ל-ϕ אם כל קבוע הנמצא ב-ϕ הוא קבוע של L. נאמר שמבנה $\boldsymbol{A}$ מתאים ל-ϕ, וגם ש-ϕ מתאימה ל-$\boldsymbol{A}$, אם שפת $\boldsymbol{A}$ מתאימה ל-ϕ.

א. אם t שם עצם בשפה L_1 וגם L_2 היא שפה מתאימה ל-t אז t הוא גם שם עצם בשפה L_2.

ב. תהי ϕ נוסחה בשפה L_1 שגם L_2 היא שפה מתאימה לה אז ϕ היא גם נוסחה ב-L_2.

ראה 2.29. כמו שם, משפט זה אומר שהתשובה לשאלה אם מחרוזת היא שם עצם או נוסחה אינה תלויה בשפה L אלא היא מתקבלת מתוך התבוננות במחרוזת עצמה.

8.10 הגדרת פעולות תחשיב היחסים. כמו בתחשיב הפסוקים, לצורך מה שהוכחנו עד כה על שפת תחשיב היחסים איננו צריכים לדעת איך בדיוק נראים הביטויים של השפה, אבל הדבר דרוש לצורך הקריאה היחידה שלהם. לכן ניתן כאן הגדרה של הפעולות היוצרות את הביטויים של תחשיב היחסים.

לסימן פעולה n-מקומי G	$\mathsf{G}(t_1, \ldots, t_n) = \mathsf{G}(t_1, \ldots, t_n)$
לסימן פעולה דו מקומי G	$t_1\mathsf{G}t_2 = \mathsf{G}(t_1, t_2)$
לסימן יחס n-מקומי R	$\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n) = \mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)$
לסימן יחס דו מקומי R	$t_1\mathsf{R}t_2 = \mathsf{R}(t_1, t_2)$
	$\neg\phi = \boldsymbol{\neg}\,\phi$
לקשר דו מקומי יסודי $\Box$	$\phi\Box\psi = (\phi\,\blacksquare\,\psi)$
לכמת Q ולמשתנה x	$\mathsf{Qx}\phi = \mathbf{Q}\mathsf{x}(\phi)$

8.11 משפט הקריאה היחידה לשמות עצם ונוסחאות. א. לשם עצם t קיימת בדיוק אחת מבין שתי האפשרויות הבאות:

(i) t הוא סימן אישי.

(ii) קיים $1 \geq n$ יחיד, סימן פעולה n-מקומי יחיד G ושמות עצם $t_1, \ldots, t_n$ יחידים כך ש- $t = \mathsf{G}(t_1, \ldots, t_n)$.

ב. אם ϕ היא נוסחה אטומית אז קיים $n \geq 1$ יחיד, סימן יחס n-מקומי יחיד R ושמות עצם $t_1, \ldots, t_n$ יחידים כך ש- $\phi = \mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)$.

(אם השפה מכילה גם קבועי יחס 0-מקומיים אז במקרה $n = 0$ $\phi = \mathsf{R}$ ללא סוגריים).

ג. אם ϕ היא נוסחה אז קיים בדיוק אחד המקרים הבאים:

(i) ϕ היא נוסחה אטומית.

(ii) ϕ היא $\neg\psi$ עבור נוסחה ψ יחידה.

(iii) ϕ היא $\psi\Box\chi$ עבור קשר דו-מקומי יסודי יחיד $\Box$ ונוסחאות ψ, χ יחידות.

(iv) ϕ היא $\mathsf{Qx}(\psi)$ עבור כמת Q יחיד, משתנה x יחיד ונוסחה ψ יחידה.

הוכחה. ההוכחה מתבססת על אותם רעיונות כמו הוכחת משפט הקריאה היחידה בתחשיב הפסוקים, ואין בה שום דבר עקרוני חדש.

8.12 משפט הקריאה היחידה האלגוריתמית לשמות עצם ונוסחאות. תהי L שפה כך שקיים אלגוריתם העונה על השאלה אם סימן נתון הוא סימן של L, מהו התפקיד שלו ב-L ומהו מספר המקומות שלו (אם הוא קבוע יחס או קבוע פעולה).

א. קיים אלגוריתם הבודק אם מחרוזת t נתונה היא שם עצם של L או לא, ובמקרה של תשובה חיובית האלגוריתם עונה אם שם העצם הוא קבוע אישי או משתנה, או שהוא נותן את מספר n, סימן הפעולה G ושמות העצם $t_1, \ldots, t_n$ כך ש- $t = \mathsf{G}(t_1, \ldots, t_n)$.

ב. קיים אלגוריתם הבודק אם מחרוזת ϕ נתונה היא נוסחה אטומית של L או לא, ובמקרה של תשובה חיובית האלגוריתם נותן את המספר n, את סימן היחס R ואת שמות העצם $t_1, \ldots, t_n$ כך ש- $\phi = \mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)$.

ג. קיים אלגוריתם הבודק אם מחרוזת ϕ נתונה היא נוסחה של L או לא, ובמקרה של תשובה חיובית האלגוריתם מודיע לאיזה סוג מן הסוגים $(i) - (iv)$ של 8.11ג' שייכת הנוסחה, ובנוסף לכך הוא נותן את המידע הבא.

אם ϕ היא $\neg\psi$ עבור נוסחה ψ האלגוריתם נותן את ψ.

אם ϕ היא $\psi\Box\chi$ עבור קשר דו-מקומי יסודי $\Box$ ונוסחאות ψ, χ האלגוריתם נותן את $\Box$, ψ ו-χ.

אם ϕ היא $\mathsf{Qx}(\psi)$ עבור כמת Q ומשתנה u האלגוריתם נותן את Q, את x ואת ψ.

הוכחה. ההוכחה מתבססת על אותם רעיונות כמו הוכחת משפט הקריאה היחידה בתחשיב הפסוקים, ואין בה שום דבר עקרוני חדש.

כמו בתחשיב הפסוקים, כדי לפתח את הסמנטיקה של תחשיב היחסים אנו זקוקים להגדרה ברקורסיה של פונקציות על שמות העצם ועל הנוסחאות. הוכחת משפטי ההגדרה ברקורסיה על שמות העצם ועל הנוסחאות דומה לגמרי להוכחת משפט הרקורסיה על הפסוקים בתחשיב הפסוקים ועל כן לא נביא הוכחות אלו כאן. יתר על כן, אפשר לתת משפט כללי על הגדרה ברקורסיה המכסה את כל משפטי ההגדרה ברקורסיה בתחביר, וכך נעשה הדבר במהדורה הראשונה, אבל בחרנו לא לעשות זאת במהדורה הנוכחית כדי שהדיון לא יהיה מופשט מדי.

8.13 הגדרה ברקורסיה על שמות העצם. תהי L שפה של תחשיב היחסים. תהי W קבוצה כלשהי. תהיינה G_{cn} פונקציה מקבוצת הקבועים האישיים של L לתוך W, G_{vr} פונקציה מקבוצת המשתנים לתוך W, ולכל קבוע פעולה n-מקומי H של L תהי G_{H} פונקציה מ-W^n (שהיא קבוצת ה-n-יות של איברי W) לתוך W. קיימת פונקציה F יחידה מקבוצת כל שמות העצם של L לתוך W המקיימת:

א. לכל קבוע אישי c של L $F(\mathsf{c}) = G_{\mathrm{cn}}(\mathsf{c})$.

ב. לכל משתנה x $F(\mathsf{x}) = G_{\mathrm{vr}}(\mathsf{x})$.

ג. לכל קבוע פעולה n-מקומי H של L ושמות עצם $t_1, \ldots, t_n$ של L $F(\mathsf{H}(t_1, \ldots, t_n)) = G_{\mathsf{H}}(F(t_1), \ldots, F(t_n))$.

8.14 הגדרה ברקורסיה על הנוסחאות. תהיינה L שפה של תחשיב היחסים, V קבוצת המשתנים של השפה ו-W קבוצה כלשהי. תהיינה G_{af} פונקציה מקבוצת הנוסחאות האטומיות של L לתוך W, $G_\neg : W \to W$, לכל קשר דו מקומי יסודי $\Box$ $G_\Box : W \times W \to W$, ולכל כמת Q $G_{\mathsf{Q}} : V \times W \to W$.

קיימת פונקציה F יחידה מקבוצת כל הנוסחאות של L לתוך W המקיימת:

א. לכל נוסחה אטומית ϕ של L $F(\phi) = G_{\mathrm{af}}(\phi)$.

ב. לכל פסוק ϕ של L $F(\neg\phi) = G_\neg(F(\phi))$.

ג. לפסוקים כלשהם ϕ, ψ של L ולקשר פסוקי יסודי $\Box$ $F(\phi\Box\psi) = G_\Box(F(\phi), F(\psi))$.

ד. לכל פסוק ϕ של L, כמת Q ומשתנה x $F(\mathsf{Qx}\phi) = G_{\mathsf{Q}}(\mathsf{x}, F(\phi))$.

כעת אנו מגיעים לסמנטיקה של תחשיב היחסים. כפי שכבר הערנו לעיל ביטויי תחשיב היחסים "מדברים" תמיד על מבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ מתאים. ברור שצריכה להיות התאמה בין המבנה לשפה. לדוגמא, אם המבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ מורכב מעולם A ומיחס סדר $>$ על A ללא יחסים או פעולות נוספים אז ברור שהשפה לטיפול במבנה זה צריכה להכיל את קבוע היחס $\approx$ המסמן את השוויו וקבוע יחס דו-מקומי המסמן את יחס הסדר, ואלו הם כל הקבועים של השפה. דוגמא שניה הוא מבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ המורכב משדה F עם איברים מצויינים $0,1$ ועם שתי הפעולות הדו-מקומיות של החיבור והכפל בשדה. שפה המדברת על מבנה זה חייבת להכיל, בנוסף על קבוע השוויון $\approx$, קבועים אישיים $0,1$ עבור האיברים $0,1$, ושני קבועי פעולה דו-מקומיים המסמנים את פעולות החיבור והכפל. מי קודם למי, המבנה או השפה? לא נכנס לשאלה זאת שהיא שאלה פילוסופית. לנו נוח, מסיבות טכניות, להניח שהשפה קודמת למבנים ושכל מבנה נוצר בהתאמה לשפה נתונה.

8.15 פועלים על קבוצה. בהינתן קבוצה A אנו נעסוק פעמים רבות בהקשר אחד באיברים של A, ביחסים על A ובפעולות על A. כדי שנוכל לדבר על כל סוגי העצמים הללו בבת אחת נקרא לכולם **פועלים על $\mathbf{A}$**. בשפה L של תחשיב היחסים נמצאים רכיבים מתאימים לכל סוגי הפועלים, ואנו נאמר שאיברי A מתאימים לקבועים האישיים של L, היחסים ה-n-מקומיים על A מתאימים לקבועי היחס ה-n-מקומיים של L, והפעולות ה-n-מקומיות על A מתאימות לקבועי הפעולה ה-n מקומיים על A.

8.16 מבנה. תהי L שפה של תחשיב היחסים. **מבנה מתאים ל-$\boldsymbol{L}$** זהו זוג $\boldsymbol{\mathcal{A}}=\langle A,I\rangle$ היכן ש-A היא קבוצה לא ריקה הנקראת **העולם** של $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ו-I היא פונקציה שתחומה היא קבוצת הקבועים של L, ולכל קבוע R של L $I(\mathsf{R})$ הוא פועל על A המתאים ל-R, ו- $I(\approx)$ הוא יחס הזהות על A. השפה L תיקרא **שפת $\boldsymbol{\mathcal{A}}$**. עבור $\boldsymbol{\mathcal{A}}=\langle A,I\rangle$ וקבוע R של שפת $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ נכתוב בדרך כלל $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathsf{R})$ או $\mathsf{R}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ במקום $I(\mathsf{R})$.

נראה מספר דוגמאות. תהי L שפה שהקבועים שלה הם קבוע היחס $\approx$, קבועי הפעולה הדו-מקומיים $\dot{+}$ ו-$\circ$ והקבועים האישיים 0 ו-1. דוגמא למבנה מתאים ל-L הוא זוג $\boldsymbol{\mathcal{A}}=\langle F,I\rangle$ כאשר F שדה, $\approx^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ (שהינו $I(\approx)$) הוא יחס הזהות על F, $\dot{+}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ היא פעולת החיבור של השדה, $\circ^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ היא פעולת הכפל של השדה, $0^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ הוא איבר האפס של השדה ו- $1^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ הוא איבר היחידה של השדה.

יש לשים לב להבחנה הברורה שעשינו כאן בין קבועי השפה לבין הפועלים אותם הם מסמנים. פעולת החיבור בשדה F מסומנת בדרך כלל בסימן $+$. את סימן הפעולה המתאים לפעולה זאת סימנו ב-$\dot{+}$ שהוא דומה ל-$+$ אבל שונה ממנו. כמו כן, פעולת הכפל בשדה F מסומנת בדרך כלל בסימן $\cdot$, ואת סימן הפעולה המתאים לפעולה זאת סימנו ב-$\circ$ שהוא דומה במידת מה ל-$\cdot$ אבל שונה ממנו. את הקבועים האישיים המתאימים למספרים $0,1$ סימנו ב- $0,1$, שאלו הן ספרות בגופן שונה.

ההבחנה בין הקבועים לבין הפועלים אותם הם מסמנים היא חשובה מאוד כי מדובר בעצמים שונים בתכלית. כשאנו כותבים $+$ אנו מתכוונים לפעולת החיבור של השדה, ולא לסימן כלשהו. לעומת זאת כשאנו כותבים $\dot{+}$ אנו מתכוונים לקבוע פעולה של השפה, שהוא סימן וככזה הוא יצור של התחביר. $\dot{+}$ הוא סימן שאינו קשור, לכשעצמו, לשדה F כלשהו או למבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ כלשהו. חוסר ההבחנה בין הסימנים לבין הפועלים הוא מקור לטעויות רבות של תלמידים.

עם זאת, כאשר עוסקים בנושאים מתקדמים יותר בלוגיקה משתמשים באותם הסימנים עבור הקבועים ועבור הפועלים אותם הם מסמנים. למשל, שם הסימן $+$ מסמן גם את פעולת החיבור וגם את סימן פעולת החיבור, ואין צורך בסימן $\dot{+}$. שם הדבר אפשרי כי מדובר באנשים המתמצאים יותר בלוגיקה ויודעים, לפי ההקשר, היכן $+$ מסמן את קבוע החיבור והיכן $+$ מסמן את פעולת החיבור.

8.17 מבנה המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$. העולם של $\mathbf{N}$ הוא קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0) שאנו מסמנים אותה באות היוונית ω. שפת המבנה היא $\{\approx,0,\mathsf{S}\}$, $\approx^{\mathbf{N}}$ הוא יחס הזהות על ω, $\mathsf{S}^{\mathbf{N}}=d$, היכן ש-$d$ היא פעולת העוקב על ω, כלומר הפעולה המוגדרת ע"י $d(n)=n+1$ לכל n, ו- $0^{\mathbf{N}}=0$. היות ונרבה לעסוק במבנה זה, וברור לנו מיהו הסימן המסמן איזה פועל נמשיך לדבר, באופן לא פורמלי, על מבנה זה כמבנה $\langle\omega,0,d\rangle$. כמו כן, כאשר נדבר על המבנה $\langle\omega,0,d,+,\cdot,<\rangle$ נתכוון למבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ בשפה שקבועיה הם $\approx,0,\mathsf{S},\dot{+},\circ,\prec$, אשר עבורו $\approx^{\boldsymbol{\mathcal{A}}},0^{\boldsymbol{\mathcal{A}}},\mathsf{S}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ הם כנ"ל והמקיים $\dot{+}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}=+$, $\circ^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}=\cdot$ ו- $\prec^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}=<$. אנו נמשיך ונקרא לכל אחד מהמבנים $\langle\omega,0,d\rangle$, $\langle\omega,0,d,+,\cdot\rangle$ ו- $\langle\omega,0,d,+,\cdot,<\rangle$ בשם מבנה המספרים הטבעיים ויהיה ברור מתוך ההקשר לאיזה מבין שלושת המבנים הללו אנו מתכוונים.

8.18 מתן משמעות לסימני השפה. כיצד מקבלים הסימנים של השפה את משמעותם? לסוגריים ולפסיק אין משמעות והם קיימים לצרכים תחביריים בלבד. לסימני הקשרים יש משמעות, כאשר המשמעות של

כל סימן קשר היא לוח האמת של הקשר המתאים. לכן המשמעות של סימני הקשרים היא קבועה לגמרי בכך שאינה משתנה כאשר אנו עוברים ממבנה אחד למבנה אחר. אנו נראה את המשמעות של הכמתים כאשר נגדיר את ערכי האמת של הנוסחאות, ואז גם נראה כי המשמעות של הכמתים תלויה בעולם A של המבנה בו נעסוק, אבל לא בפועלים של המבנה. נותרו לנו עתה הקבועים והמשתנים. כפי שכבר הזכרנו לעיל, המשמעות של קבוע חייבת להיות פועל מתאים. מבנה $\boldsymbol{A}$ המתאים לשפה L נותן משמעות $\boldsymbol{A}(\mathsf{R})$ לכל קבוע R של השפה. זאת היא הסיבה שאנו קוראים לקבועים בשם זה כי משמעותם נקבעת ע"י המבנה, אם כי היא משתנה כאשר אנו עוברים ממבנה אחד למשנהו. אין לראות במעבר ממבנה אחד לשני שימוש חריג בשפה; זה טבעי ששפה L נתונה עוסקת במבנים רבים. למשל, כאשר אנו מוכיחים משפט בתורת השדות המשפט שהוכחנו אמור להיות אמיתי בכל שדה.

כעת עלינו לדון בשאלת המשמעות של המשתנים. למשתנים אלו אין משמעות קבועה אפילו כאשר מדברים על מבנה מסויים, אבל צריך לתת להם משמעות ארעית כפי שנראה. נסתכל למשל בשם העצם $1 \dot{+} 1$ בתורת המספרים. הערך של הקבוע האישי 1 הוא המספר 1 ושל קבוע הפעולה $\dot{+}$ הוא פעולת החיבור $+$, ולכן הערך של הביטוי $1 \dot{+} 1$ הוא המספר $1+1$, כלומר 2. כעת נתבונן בביטוי $\mathsf{x} \dot{+} 1$ וננסה לראות מהו הערך שלו. ברור שמבנה המספרים הטבעיים אינו נותן לו ערך מסויים, אולם יש לו ערך התלוי בערך שנקבע ל-x. למשל, אם נתן ל-x את הערך 7 יהיה הערך של $\mathsf{x} \dot{+} 1$ $7+1$, כלומר 8. בשביל לתת ערכים לכל המשתנים של L נשתמש בפונקציה הנותנת להם ערכים בדיוק כמו שבמבנה $\boldsymbol{A} = \langle A, I\rangle$ הפונקציה I נותנת ערכים לכל הקבועים של L.

8.19 הגדרה. תהי A קבוצה. **השמה** (assignment) ב-A היא פונקציה s שתחומה הוא קבוצת המשתנים וערכיה הם איברי A.

8.20 הגדרת הערך של שם עצם. תהי L שפה ויהי $\boldsymbol{A}$ מבנה מתאים ל-L. לכל שם עצם t של L אנו מגדירים את הערך $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, t)$ של t במבנה $\boldsymbol{A}$ ובהשמה s ברקורסיה על יצירת שם העצם t כדלקמן. לכל קבוע אישי c של L $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \mathsf{c}) = \mathsf{c}^{\boldsymbol{A}}$.

לכל משתנה x $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \mathsf{x}) = s(\mathsf{x})$.

לכל סימן פעולה n-מקומי H ושמות עצם $t_1, \ldots, t_n$

$$\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \mathsf{H}(t_1, \ldots, t_n)) = \mathsf{H}^{\boldsymbol{A}}(\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, t_1), \ldots, \mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, t_n)) \qquad (1)$$

נדגיש שהערך של קבוע אישי נתון ע"י המבנה בלבד, והערך של משתנה ע"י ההשמה בלבד. הערך של שם עצם הכולל משתנים וקבועי פעולה תלוי גם במבנה וגם בהשמה.

8.21 תרגיל. א. הוכח באינדוקציה על שם העצם t כי הערך $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, t)$ של t נמצא ב-A.

ב. שם עצם נקרא **שם עצם קבוע** אם אינו מכיל משתנים. נסח בניסוח פורמלי את הטענה כי הערך $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, t)$ של שם עצם קבוע t אינו תלוי בהשמה s, והוכח אותה.

דוגמא. נחשב את הערך של $\mathsf{x} \circ (\mathsf{y} \dot{+} 1)$ במבנה המספרים הטבעיים ובהשמה הנותנת ל-x את הערך 2 ול-y את הערך 3. נעקוב אחר יצירת שם העצם $\mathsf{x} \circ (\mathsf{y} \dot{+} 1)$ ונחשב את הערכים של כל שמות העצם המתקבלים תוך יצירה זאת. המבנה $\boldsymbol{A}$ נותן לקבוע האישי 1 את הערך שהוא המספר 1. ההשמה s נותנת ל-x, y את הערכים $2, 3$ בהתאמה. כעת נחשב את הערך של $\mathsf{y} \dot{+} 1$. לפי 8.10 $\mathsf{y} \dot{+} 1 = \dot{+}(\mathsf{y}, 1)$. היות ו-$\dot{+}$ הוא קבוע פעולה ערכו נקבע כ-$\dot{+}^{\mathbf{N}}$ ע"י המבנה $\mathbf{N}$ של המספרים הטבעיים ומבנה זה נותן ל-$\dot{+}$ את הערך $+$, כאשר $+$ היא פעולת החיבור של המספרים הטבעיים. לכן לפי (1) הערך של $\mathsf{y} \dot{+} 1$ הוא $3+1=4$. כעת כשאנו יודעים כבר את הערכים של x ושל $\mathsf{y} \dot{+} 1$ ניגש לחישוב הערך של $\mathsf{x} \circ (\mathsf{y} \dot{+} 1)$. המשמעות של קבוע הפעולה $\circ$ נתונה ע"י המבנה והיא פעולת הכפל $\cdot$ במספרים הטבעיים. לכן הערך של $\mathsf{x} \circ (\mathsf{y} \dot{+} 1)$ הוא $2 \cdot 4 = 8$.

8.22 הגדרת האמת. תהי L שפה ויהי $\boldsymbol{A}$ מבנה מתאים ל-L. לכל נוסחה ϕ של L אנו מגדירים את ערך האמת $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \phi)$ של ϕ במבנה $\boldsymbol{A}$ ובהשמה s כדלקמן. אנו משתמשים ב- val כדי לסמן גם את פונקצית הערך של שמות העצם וגם את פונקצית ערך האמת של הנוסחאות, אבל אין בכך כל פגם כי אנו יודעים באיזו פונקציה מדובר לפי הביטוי שהיא מופעלת עליו, שם עצם או נוסחה.

א. אם ϕ היא נוסחה אטומית אז היא בעלת הצורה $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)$ כאשר R הוא סימן יחס n-מקומי. ערכה של הנוסחה מוגדר ע"י

$$\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)) = \mathsf{R}^{\boldsymbol{A}}(\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, t_1), \ldots, \mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, t_n)) \qquad (2)$$

ראינו בהגדרת הערך של שם עצם כי $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, t_1), \ldots, \mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, t_n) \in A$. היות ו- $\mathsf{R}^{\boldsymbol{A}}$ הוא יחס n-מקומי על A לכן הערך ש-(2) נותנת ל- $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n))$ הוא ערך אמת.

לנוסחה ϕ כללית ערך האמת של הנוסחה מוגדר ברקורסיה על יצירת הנוסחה, כאשר לנוסחאות האטומיות הגדרנו את ערך האמת ב-א' ושלב הרקורסיה הוא כדלקמן.

ב. אם $\phi = \psi \square \chi$, כאשר $\square$ קשר דו מקומי יסודי, אז

$$\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \psi \square \chi) = t_{\square}(\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \psi), \mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \chi)) \tag{3}$$

ג. אם $\phi = \neg\psi$ אז

$$\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \neg\psi) = t_{\neg}(\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \psi)) \tag{4}$$

לפני שנדון במקרים הנותרים נאמר עוד מספר דברים. ראשית, נזכיר שקבוצת שני ערכי האמת מסודרת כך ש- $F < T$, ולנוחיותנו נשתמש בסדר זה. שנית, עבור פונקציה f כלשהי $f\binom{y}{a}$ מסמן את הפונקציה g שתחומה כתחום f ולכל x בתחומה $g(x) = f(x)$ פרט לכך ש- $g(y) = a$, מבלי להתחשב בערך $f(y)$.

ד. אם $\phi = \forall \mathsf{x} \psi$, כאשר x משתנה כלשהו, אז

$$\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \forall \mathsf{x} \psi) = \min\left\{\mathrm{val}\left(\boldsymbol{A}, s\tbinom{\mathsf{x}}{a}, \psi\right) \mid a \in A\right\} \tag{5}$$

ה. אם $\phi = \exists \mathsf{x} \psi$, כאשר x משתנה כלשהו, אז

$$\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \exists \mathsf{x} \psi) = \max\left\{\mathrm{val}\left(\boldsymbol{A}, s\tbinom{\mathsf{x}}{a}, \psi\right) \mid a \in A\right\} \tag{6}$$

נוכיח עתה באינדוקציה על יצירת הנוסחה ϕ כי הערך של ϕ הוא ערך אמת, כלומר T או F, ובמקביל נסביר את הגדרת האמת.

א. כבר הזכרנו לעיל כי הערך של כל נוסחה אטומית הוא ערך אמת.

ב. אם $\phi = \psi \square \chi$ אז לפי הנחת האינדוקציה $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \psi)$ ו- $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \chi)$ הם ערכי אמת. על שני ערכי אמת אלו אנו מפעילים ב-(3) את לוח האמת $t_{\square}$ והתוצאה היא ערך אמת. למשל, אם $\phi = \psi \wedge \chi$ אז הערך של ϕ מתקבל ע"י הפעלת לוח האמת $t_{\wedge}$ של $\wedge$ על הערכים של ψ ו-χ, כלומר ϕ אמיתית אםם גם ψ וגם χ אמיתיות.

ג. אם $\phi = \neg\psi$ אז לפי הנחת האינדוקציה $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \psi)$ הוא ערך אמת. הפעלת $t_{\neg}$ על ערך זה נותנת גם היא ערך אמת, ולכן לפי (4) גם $\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \neg\psi)$ הוא ערך אמת.

ד. אם $\phi = \forall \mathsf{x} \psi$ אז הערך של ϕ נקבע ע"י (5). אגף ימין של (5) הוא מינימום של קבוצת ערכי אמת ולכן הוא, כמובן, גם ערך אמת.

נראה עתה מה אומרת ההגדרה (5). אנו קוראים את $\forall \mathsf{x} \psi$ כ-"לכל x מתקיים ψ", כאשר ב- "לכל x" הכוונה היא לכל איבר של A. לכן כדי לדעת אם הנוסחה $\forall \mathsf{x} \psi$ אמיתית אנו צריכים לבדוק אם ψ אמיתית עבור כל הערכים ב-A של x. אנו בודקים לכן את אמיתיות ψ כאשר ל-x אנו נותנים את כל הערכים האפשריים a בעוד שיתר המשתנים ב-ψ מקבלים את הערכים הניתנים להם ע"י s והקבועים ב-ψ מקבלים את הערכים הניתנים להם ע"י $\boldsymbol{A}$. כיצד אנו נותנים ל-x את הערך a בעוד שלשאר המשתנים אנו נותנים את הערכים הניתנים להם ע"י s? לשם כך אנו משתמשים בהשמה $s\binom{\mathsf{x}}{a}$ הנותנת לכל משתנה את הערך הניתן לו ע"י s פרט לכך שהערך של x נקבע במפורש כ-a. לכן אנו בודקים את הערכים $\mathrm{val}\left(\boldsymbol{A}, s\binom{\mathsf{x}}{a}, \psi\right)$ לכל $a \in A$. אם כל הערכים הללו הם אמת אז סביר שנקבע שהנוסחה "לכל x ψ" אמיתית ב-$\boldsymbol{A}$ וב-s. אם, לעומת זאת, אחד מערכים אלו הוא שקר אז סביר לקבוע שהנוסחה "לכל x ψ" אינה אמיתית ב-$\boldsymbol{A}$ וב-s. זה בדיוק מה שעשינו ב-(5) כי מינימום של קבוצת ערכי אמת הוא T אםם הקבוצה אינה מכילה את F. ניסוח שקול ל-(5) הוא

$$\mathrm{val}(\boldsymbol{A}, s, \forall \mathsf{u} \psi) = \begin{cases} T & \text{אם לכל } a \in A \ \ \mathrm{val}\left(\boldsymbol{A}, s\binom{\mathsf{x}}{a}, \psi\right) = T \\ F & \text{אחרת} \end{cases} \tag{7}$$

בהגדרת האמת העדפנו להשתמש ב-(5) כי הוא קצר יותר לכתיבה ונוח יותר לשימוש.

ה. את הנוסחה $\exists \mathsf{x}\psi$ אנו קוראים "קיים x כך ש- ψ", מאותם שיקולים שהזכרנו כאשר טפלנו בנוסחה $\forall \mathsf{x}\psi$. ברור שניתן להגדיר את $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \exists \mathsf{x}\psi)$ גם ע"י

(8) $$\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \exists \mathsf{x}\psi) = \begin{cases} T & \text{אם קיים } a \in A \text{ כך ש- } \mathrm{val}\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s\binom{\mathsf{x}}{a}, \psi\right) = T \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

הגדרה זאת שקולה ל-(6) כי מקסימום של קבוצת ערכי אמת הוא T אםם הקבוצה מכילה את T.

8.23 הערה ליודעי ח"נ. נדון עתה באופי ההשתלבות של מקרים ד' ו-ה' בסכימת ההגדרה ברקורסיה. (5) ו-(6) מחשבים את הערכים של $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \forall \mathsf{x}\psi)$ ו- $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \exists \mathsf{x}\psi)$ מן הערכים של $\mathrm{val}\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s\binom{\mathsf{x}}{a}, \psi\right)$ כלומר, ערכי האמת של $\forall \mathsf{x}\psi$ ושל $\exists \mathsf{x}\psi$ מחושבים מערכי האמת של ψ. $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ הוא פרמטר בהגדרה זאת כי הוא מופיע בשני הצדדים של (5) ו-(6). לעומת זאת s אינו פרמטר כי כדי לחשב את הערך של $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \forall \mathsf{x}\psi)$ לא די לדעת את הערך של $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \psi)$ אלא צריך לדעת את הערכים של $\mathrm{val}\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s\binom{\mathsf{x}}{a}, \psi\right)$ לכל $a \in A$. כדי לראות מה בדיוק אנו מגדירים כאן ברקורסיה נסמן ב- $\mathrm{valfun}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \phi)$ את הפונקציה שתחומה הוא קבוצת כל ההשמות ל-L ב-A ואשר לכל השמה s כזאת ערכה הוא $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \phi)$, כלומר

$$\mathrm{valfun}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \phi)(s) = \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \phi)$$

מה שאנו מגדירים ברקורסיה על יצירת ϕ זאת הפונקציה $\mathrm{valfun}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \phi)$. ברור כי (5) ו-(6) מראים כיצד לחשב את $\mathrm{valfun}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \forall \mathsf{x}\psi)$ ואת $\mathrm{valfun}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \exists \mathsf{x}\psi)$ מתוך $\mathrm{valfun}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \psi)$, כאשר הערך של, למשל, $\mathrm{valfun}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \forall \mathsf{x}\psi)$ עבור s מחושב לא רק מן הערך של $\mathrm{valfun}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \psi)$ עבור s אלא גם מערכים של $\mathrm{valfun}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \psi)$ עבור השמות אחרות (שהן ההשמות $s\binom{\mathsf{x}}{a}$).

8.24 דוגמה של חישוב ערך של נוסחה במבנה. נעסוק במבנה המספרים הטבעיים $\mathfrak{N}$ ובנוסחה $1 \prec \mathsf{x} \wedge \forall \mathsf{y}(\exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{y} \approx 1 \vee \mathsf{y} \approx \mathsf{x})$ האומרת, אינטואיטיבית, ש-x הוא מספר ראשוני.

תהי עתה s השמה ל-ω, ונחשב את הערכים של הביטויים בנוסחה זאת בהשמה s. ההגדרה ברקורסיה של הערכים הולכת מביטויים לביטויים יותר פשוטים לביטויים יותר מסובכים, וכן נעשה כאן בחישוב ערכים אלו. מכיוון שכל החישובים כאן נעשים במבנה $\mathfrak{N}$ נשמיט את הסימן $\mathfrak{N}$ מן הביטויים $\mathrm{val}(\mathfrak{N}, \ldots)$.

א. לפי הגדרת הערך של משתנה $\mathrm{val}(s, \mathsf{x}) = s(\mathsf{x})$, $\mathrm{val}(s, \mathsf{y}) = s(\mathsf{y})$ ו- $\mathrm{val}(s, \mathsf{z}) = s(\mathsf{z})$.

ב. לפי הגדרת הערך של קבוע אישי $\mathrm{val}(s, 1) = 1^{\mathfrak{N}} = 1$.

ג. לפי (1) $\mathrm{val}(s, \mathsf{y} \circ \mathsf{z}) = \circ^{\mathfrak{N}}(\mathrm{val}(s, \mathsf{y}), \mathrm{val}(s, \mathsf{z}))$

ומכיוון ש- $\circ^{\mathfrak{N}} = \cdot$ ולפי א' $\mathrm{val}(s, \mathsf{y} \circ \mathsf{z}) = s(\mathsf{y}) \cdot s(\mathsf{z})$

ד. לפי (2) $\mathrm{val}(s, \mathsf{y} \approx \mathsf{x}) = \approx^{\mathfrak{N}} (\mathrm{val}(s, \mathsf{y}), \mathrm{val}(s, \mathsf{x}))$

ומכיוון ש- $\approx^{\mathfrak{N}}$ הוא יחס הזהות ולפי א' $\mathrm{val}(s, \mathsf{y} \approx \mathsf{x}) = \begin{cases} T & \text{אם } s(\mathsf{y}) = s(\mathsf{x}) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$

ה. בדומה ל-ד', ולפי ב' $\mathrm{val}(s, \mathsf{y} \approx 1) = \begin{cases} T & \text{אם } s(\mathsf{y}) = 1 \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$

ו. לפי (2) $\mathrm{val}(s, 1 \prec \mathsf{x}) = \prec^{\mathfrak{N}} (\mathrm{val}(s, 1), \mathrm{val}(s, \mathsf{x}))$

ומכיוון ש- $\prec^{\mathfrak{N}}$ הוא יחס הסדר $<$ ולפי א' ו-ב' $\mathrm{val}(s, 1 \prec \mathsf{x}) = \begin{cases} T & \text{אם } 1 < s(\mathsf{x}) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$

ז. לפי (2) $\mathrm{val}(s, \mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) = \approx^{\mathfrak{N}} (\mathrm{val}(s, \mathsf{y} \circ \mathsf{z}), \mathrm{val}(s, \mathsf{x}))$

ומכיוון ש- $\approx^{\mathfrak{N}}$ הוא יחס הזהות ולפי א' ו-ג' $\mathrm{val}(s, \mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) = \begin{cases} T & \text{אם } s(\mathsf{y}) \cdot \sigma(\mathsf{z}) = s(\mathsf{x}) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$

ח. לפי הגדרת האמת $\mathrm{val}(s, \mathsf{y} \approx 1 \vee \mathsf{y} \approx \mathsf{x}) = t_{\vee}(\mathrm{val}(s, \mathsf{y} \approx 1), \mathrm{val}(s, \mathsf{y} \approx \mathsf{x}))$

ולפי ד', ה' והגדרת $t_{\vee}$ $\mathrm{val}(s, \mathsf{y} \approx 1 \vee \mathsf{y} \approx \mathsf{x}) = \begin{cases} T & \text{אם } \sigma(\mathsf{y}) = 1 \text{ או } s(\mathsf{y}) = s(\mathsf{x}) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$

ט. לפי (6) $\mathrm{val}(s, \exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x})) = \max\left\{\mathrm{val}(s\binom{\mathsf{z}}{n}, \mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) \mid n \in \omega\right\}$

וזה אומר כי $\mathrm{val}(s, \exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x})) = T$

אםם קיים $n \in \omega$ כך ש- $\mathrm{val}(s\binom{\mathsf{z}}{n}, \mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) = T$

אם נציב ב-ז' $s\binom{\mathsf{z}}{n}$ עבור s ונזכור כי $s\binom{\mathsf{z}}{n}(\mathsf{z}) = n$ ולכל משתנה u השונה מ-z קיים $s\binom{\mathsf{z}}{n}(\mathsf{u}) = s(\mathsf{u})$ אז אגף שמאל ב-ט' הוא T אםם קיים $n \in \omega$ כך ש- $s(\mathsf{y}) \cdot n = s(\mathsf{x})$, כלומר אםם $s(\mathsf{y})$ מחלק את $s(\mathsf{x})$. כך

קבלנו

$$\mathrm{val}(s, \exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x})) = \begin{cases} T & \text{אם } s(\mathsf{y}) \text{ מחלק את } s(\mathsf{x}) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

י. לפי הגדרת האמת

$$\mathrm{val}(s, \exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{y} \approx 1 \vee \mathsf{y} \approx \mathsf{x}) = t_{\rightarrow}(\mathrm{val}(s, \exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x})), \mathrm{val}(s, \mathsf{y} \approx 1 \vee \mathsf{y} \approx \mathsf{x}))$$

ולפי ח', ט' והגדרת $t_{\rightarrow}$

$$\mathrm{val}(s, \exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{y} \approx 1 \vee \mathsf{y} \approx \mathsf{x}) =$$

$$= \begin{cases} T & \text{אם } s(\mathsf{y}) \text{ אינו מחלק את } s(\mathsf{x}) \text{ או ש- } \sigma(\mathsf{y}) = 1 \text{ או ש- } s(\mathsf{y}) = s(\mathsf{x}) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

י"א. לפי (5)

$$\mathrm{val}(s, \forall \mathsf{y}(\exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{y} \approx 1 \vee \mathsf{y} \approx \mathsf{x})) =$$

$$= \min\{\mathrm{val}(s\tbinom{\mathsf{y}}{m}, \exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{y} \approx 1 \vee \mathsf{y} \approx \mathsf{x}) \mid m \in \omega\}$$

נשתמש עתה ב-י', עם $s\tbinom{\mathsf{y}}{m}$ במקום s, ונזכור כי $s\tbinom{\mathsf{y}}{m}(\mathsf{y}) = m$ ו- $s\tbinom{\mathsf{y}}{m}(\mathsf{x}) = s(\mathsf{x})$ ונקבל

$$= \begin{cases} T & \text{אם לכל } m \in \omega \;\; m \text{ אינו מחלק את } s(\mathsf{x}) \text{ או ש- } m = 1 \text{ או ש- } m = s(\mathsf{x}) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

כלומר

$$= \begin{cases} T & \text{אם לכל } m \in \omega \text{ אם } m \text{ מחלק את } s(\mathsf{x}) \text{ אז } m = 1 \text{ או } m = s(\mathsf{x}) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

כלומר

$$= \begin{cases} T & \text{אם אין ל- } s(\mathsf{x}) \text{ מחלקים השונים מ-1 ומ- } s(\mathsf{x}) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

י"ב. לפי הגדרת האמת

$$\mathrm{val}(s, 1 \prec \mathsf{x} \wedge \forall \mathsf{y}(\exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{y} \approx 1 \vee \mathsf{y} \approx \mathsf{x})) =$$

$$= t_{\wedge}(\mathrm{val}(s, 1 \prec \mathsf{x}, \mathrm{val}(s, \forall \mathsf{y}(\exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{y} \approx 1 \vee \mathsf{y} \approx \mathsf{x}))$$

ולפי ו' ו-י"א והגדרת $t_{\wedge}$

$$= \begin{cases} T & \text{אם } s(\mathsf{x}) > 1 \text{ ואין ל- } s(\mathsf{x}) \text{ מחלקים השונים מ-1 ומ- } s(\mathsf{x}) \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

כלומר

$$= \begin{cases} T & \text{אם } s(\mathsf{x}) \text{ מספר ראשוני} \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

כך ראינו שהנוסחה $1 \prec \mathsf{x} \wedge \forall \mathsf{y}(\exists \mathsf{z}(\mathsf{y} \circ \mathsf{z} \approx \mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{y} \approx 1 \vee \mathsf{y} \approx \mathsf{x})$ האומרת, אינטואיטיבית, ש-x הוא מספר ראשוני, היא אמנם אמיתית במבנה המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$ בהשמה s אםם $s(\mathsf{x})$ הוא מספר ראשוני.

מה עשינו בדוגמה שראינו? כתבנו בשפה פורמלית כנוסחה את ההיגד המוכר לנו היטב ש-x הוא מספר ראשוני ואחר כך טרחנו טירחה גדולה כדי להוכיח שנוסחה זאת באמת אומרת את מה שהתכוונו שתגיד. לכאורה טרחנו כאן הרבה ולא השגנו דבר שלא היה לנו מכתחילה. על כך שבלוגיקה מתרגמים היגדים מתמטיים לביטויים פורמליים מסובכים התלוצץ המתמטיקאי פאול הלמוש בחמשיר הבא:

If you think your paper is vacuous
Use the first order predicate calculus
Then it becomes logic
And as if by magic
The obvious is hailed as miraculous

לכן חשוב להדגיש שמטרתנו אינה להביע בשפת תחשיב היחסים את מה שאנו יודעים להביע היטב בעגה המתמטית המקובלת. מטרתנו בהגדרת השפה הפורמלית של תחשיב היחסים היא ליצור שפה מדוייקת לגמרי שאותה ניתן לחקור בכלים מתמטיים. כדי להשתמש במה שנלמד על שפה זאת עבור ההיגדים המתמטיים בעגה בה אנו מדברים עלינו לדעת אלו מהיגדים אלו ניתנים להבעה כנוסחאות בתחשיב היחסים, ולעיתים אנו גם זקוקים למידע מסויים על הנוסחאות המתקבלות. הכרת דרך התרגום של היגדים מתמטיים לנוסחאות של תחשיב היחסים חשובה לשם כך, למרות שאת התרגום עצמו לא נזדקק לבצע.

את מה שאנו עושים כאן אפשר להשוות עם העיסוק בפונקציות של מספרים ממשיים. העובדה שהפונקציות $x^2 + 3x - 2$ ו- $-5x^3 + 7x - 13$ הן פולינומים אינה מעניינת ולא בשבילה הגדרנו את מושג הפולינום. מה שחשוב שם היא ההבחנה בין הפולינומים לשאר הפונקציות כי לפולינומים ישנן תכונות טובות רבות שאינן קיימות לסתם פונקציה. בפרק א' וכאן הבאנו דוגמאות של כל מיני טענות שניתן להביען בתחשיב היחסים כדי ליצור את הרושם על כוח הביטוי של תחשיב זה, ומה שחשוב באמת זאת

הנה ההבחנה בין אותם דברים אותם אנו יכולים להביע בתחשיב היחסים ובין הדברים אותם איננו יכולים להביע בתחשיב זה. יתר על כן, כשם שלגבי פולינומים ישנה הבחנה משמעותית בין פונקציות שאפשר להציגן, למשל, כפולינומים ממעלה ≥ 3 לבין פונקציות שאפשר להציגן רק ע"י פולינומים ממעלות גבוהות כך גם את מה שאנו יכולים להביע ע"י נוסחאות של תחשיב הפסוקים אנו יכולים לסווג לפי מידת הסיבוך של הנוסחאות.

8.25 הבהרת המושגים היסודיים. כל מה שעשינו עד כה בסעיף הנוכחי הוא פשוט בתכלית. עם זאת, ישנו כנראה קושי מסויים בהבחנה בין המושגים, כי עובדה היא שרבים מתקשים בכך ושהבחנה זאת לא היתה ברורה בכלל עד למחציתה הראשונה של המאה שעברה. הגדרת האמת 8.22 של תחשיב היחסים נוסחה לראשונה בבהירות ע"י טרסקי בשנות השלושים של המאה שעברה. ניסוח זה היה הישג גדול לא משום שהוא מפתיע לכשעצמו אלא משום שהוא פיזר את הערפל שהיה סביב מושג האמת.

נחזור ונביט במושגים היסודיים של הלוגיקה. נתונה לנו שפה שמרכיביה הם סימנים וסדרות סופיות של סימנים. בדרך כלל אלו הם סימנים הכתובים על נייר או איזורים ממוגנטים בחומר מגנטי, אבל אלו הן עובדות פיסיות שאינן חשובות לדיון שלנו. מצד שני נתונים עולמות מתימטיים היכולים להיות דלים (כמו השדה Z_2 בן שני האיברים) או עשירים מאד כמו עולם תורת הקבוצות. העולמות המתימטיים מורכבים מקבוצת עצמים ומיחסים ומפעולות מסויימים על קבוצה זאת. מנקודת הראות האינטואיטיבית שלנו קיומם של עולמות מתימטיים אלו אינו תלוי כלל בשפה. בהנתן עולם מתימטי ושפה מתאימה לו אנו זקוקים למשהו שיקשר בין השניים, כלומר משהו שיאמר לנו איזה סימן יחס מתאים לאיזה יחס ואיזה סימן פעולה מתאים לאיזו פעולה, וזה בנוסף על הכללים האומרים לנו כיצד להבין את הקשרים הפסוקיים וכיצד להבין את הכמתים בהקשר לעולם המתימטי המסויים.

גישות פילוסופיות שונות נותנות משקל שונה למושגים השונים שהזכרנו, וניתן כאן תאור מאד פשטני של גישות אלו. הגישה הפלטוניסטית אומרת שהעולמות המתימטיים קיימים בזכות עצמם ולא משום שאנו מדברים עליהם. כמובן שלא מדובר כאו בקיום פיסי אלא בקיום אידאי. קיומם של עולמות אלו אולי אפילו אינו תלוי בשפה כלשהי. אנו משתמשים בשפה מתאימה רק כדי לקיים דיון בעולמות אלו וכדי להבחין בין תכונות שונות שלהם. הגישה הקיצונית הנגדית שהיא הגישה הפורמליסטית אומרת שהעצמים המתימטיים אינם קיימים כלל אלא כל מה שקיים זאת רק השפה. עם זאת אין גישה זאת פוסלת יצירת עולמות כאלו בדמיון, כי עולמות כאלו הם אמצעי עזר פסיכולוגי למתימטיקאי למרות שאין בהם כל ממשות. למשל, ברור שמה שהביא ליצירת הגיאומטריה ע"י היוונים הוא שלנגד עיניהם היה העולם המתימטי של המרחב הגיאומטרי התלת-ממדי ולא רק מערכת פורמלית של משפטים והוכחות.

מתוך שלושת המושגים שהזכרנו — השפה, עולם מתימטי ומשהו המקשר ביניהם — מושג המבנה שהגדרנו ב-8.16 ממלא אחר שני התפקידים האחרונים יחד, כי הוא נותן את העולם המתימטי יחד עם הקשר בינו לבין השפה. עשינו זאת לא משום שהשתכנענו כי השפה קודמת לעולם אלא משום היתרון הטכני שבהצגה כזאת. אנו נעסוק הרבה בעולמות שונים המתאימים לאותה שפה וכדי להשוות ביניהם בנוחות עדיף שכל עולם כזה יהיה נתון מיד יחד עם התאמת רכיביו לרכיבי השפה.

חשוב ביותר להבחין בין רכיבי השפה ורכיבי העולם. בדיון מתימטי בין מתימטיקאים אין מבחינים לעיתים קרובות בין משתנה x של השפה לבין איבר x של העולם המתימטי עליו מדברת השפה. הסיבה לאי-הבחנה זאת איננה משום שההבחנה איננה חשובה אלא משום שהיא ברורה לגמרי למתדיינים וכאשר מדברים על x ברור לגמרי למה הכוונה. בשלב הנוכחי, כאשר אנו לומדים לוגיקה, חשוב מאד לקיים הבחנה זאת באופן חד וברור, וכפי שכבר הזכרנו הדבר אינו כה פשוט למרות שהוא נראה פשוט כי עובדה היא שטעו בכך רבים וגדולים. כדי להבחין בין השניים, כלומר בין רכיבי השפה ורכיבי העולם המתימטי, אנו כותבים את רכיבי העולם המתימטי באותיות בסיגנון הרגיל המקובל במתימטיקה ואילו את רכיבי השפה אנו כותבים באותיות בסגנון שרטוט $\mathsf{F, G, R, S, x, y, z, u}$. כך x מסמן איבר של העולם המתימטי A ו-x מסמן משתנה אישי של השפה. אם $\dot{+}$ הוא סימן פעולה דו מקומי לא נכתוב $x \dot{+} y$ כי כאן אנו מערבים את האיברים x, y של העולם A עם סימן הפעולה $\dot{+}$ שהוא סימן של השפה. אנו נכתוב $\mathsf{x} \dot{+} \mathsf{y}$, שהוא שם עצם של השפה, וכן נכתוב $x + y$ שזאת הפעלת פעולת החיבור על העצמים x, y. $0, 1, 2$ הם מספרים מעולם המספרים ו- $\mathsf{0, 1, 2}$ הם קבועים. $2+1$ הוא המספר 3 ואילו $\mathsf{2} \dot{+} \mathsf{1}$ הוא שם עצם בן שלושה סימנים.

8.26 הבהרת תפקידי הקבועים והכמתים. לאור מה שהזכרנו לעיל אנו מבחינים הבחנה ברורה בין הקבועים

האישיים של השפה לבין איברי העולם שקבועים אלו מסמנים במבנה מסויים. נסתכל למשל בשפה עם סימן הפעולה הדו-מקומי $\circ$ והקבוע 1. מבנה אחד המתאים לשפה זאת הוא המבנה $\langle R, \cdot, 1\rangle$, כאשר סימון זה מסמן את המבנה שעולמו הוא קבוצת המספרים הממשיים R, לסימן הפעולה $\circ$ מתאימה פעולת הכפל $\cdot$ על הממשיים ולקבוע 1 מתאים המספר 1. מבנה שני המתאים לשפה זאת הוא $\langle G, \cdot, I\rangle$, כאשר G היא קבוצת המטריצות 3×3 של הממשיים, $\cdot$ היא פעולת כפל המטריצות ו-I היא מטריצת היחידה. מבנה שלישי המתאים לשפה זאת הוא $\langle Z, +, 0\rangle$ בו Z היא קבוצת המספרים השלמים, $+$ היא פעולת החיבור על Z ו-0 הוא המספר 0. (זה נראה אולי מוזר שהסימן $\circ$ מסמן את פעולת החיבור ושהקבוע 1 מסמן את המספר 0, אבל אין בכך פסול).

בדרך כלל רק מספר קטן מבין איברי המבנה מסומנים ע"י קבועים. למשל, נתבונן בשפה בה אנו משתמשים בדרך כלל בשביל שדות. בשפה זאת קבועי הפעולה הם $\dot{+}$ ו-$\circ$ המסמנים את החיבור והכפל, והקבועים האישיים הם 0 ו-1 המסמנים את איברי השדה 0 ו-1. כך מכל איברי השדה רק ל-0 ול-1 יש קבועים המתאימים להם. יתר על כן, אם השדה בו מדובר הוא שדה הרציונליים או שדה הממשיים ואנו מסתכלים על כל האיברים של השדה המתקבלים כערכים של שמות עצם קבועים (כלומר שמות עצם ללא משתנים) אז איברים אלו הם בדיוק המספרים הטבעיים המתקבלים כערכים של $0, 1, 1 \dot{+} 1, (1 \dot{+} 1) \dot{+} 1, \ldots$, ומספרים אחרים אינם מתקבלים כערכים של שמות עצם קבועים כלשהם. כאשר אנו אומרים, באמצעות $\forall$x, "לכל x ..." אנו מתכוונים בכך **לכל** איברי השדה ולא רק ל-0 ול-1, ואפילו לא רק למספרים הטבעיים. כמו כן, כאשר אנו אומרים, באמצעות $\exists$x, "קיים x ..." אנו מתכוונים שקיים x כלשהו בשדה המקיים את מה שנטען ו-x זה אינו חייב כלל להיות 0 או 1 או אף מספר טבעי כלשהו.

8.27 תלות הערך של שם העצם במבנה ובהשמה. בתחשיב הפסוקים שאלנו אילו מן הרכיבים של המבנה קובעים את ערך האמת של פסוק ϕ במבנה ומשפט 7.3 ענה שרכיבים אלו הם הערכים שהמבנה נותן לפסוקים היסודיים $P_1, \ldots, P_n$ המופיעים ב-ϕ. אנו שואלים שאלה זאת עתה ביחס לשמות העצם ולנוסחאות של תחשיב היחסים, כאשר כאן אנו שואלים אילו מן הרכיבים של המבנה ושל ההשמה קובעים את הערך של שם העצם או הנוסחה. באשר להשפעת המבנה על הערך התשובה תהיה דומה לזו שניתנה לגבי תחשיב הפסוקים — הערך של שם עצם t ושל נוסחה ϕ במבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ תלוי רק בערכים שהמבנה נותן לקבועים המופיעים ב-t וב-ϕ. השפעת ההשמה על הערך של שם עצם t ושל נוסחה חסרת כמתים גם היא דומה, אבל השפעתה על ערך האמת של נוסחה כללית היא מסובכת יותר ונדון בה בהמשך.

8.28 משפט. יהי t שם עצם. יהיו $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ו-$\boldsymbol{\mathcal{A}}'$ מבנים מתאימים ל-t כך ש-$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ו-$\boldsymbol{\mathcal{A}}'$ הם בעלי אותו עולם A והם הנותנים אותם ערכים לקבועים המופיעים ב-ϕ, כלומר שלכל קבוע פעולה n-מקומי G המופיע ב-t קיים $\mathsf{G}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}'} = \mathsf{G}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ ולכל קבוע אישי c המופיע ב-t קיים $\mathsf{c}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}'} = \mathsf{c}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$. תהיינה s ו-s' השמות ל-A כך שלכל משתנה המופיע ב-t קיים $s'(\mathsf{x}) = s(\mathsf{x})$. אז

$$\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s', t) = \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, t) \tag{9}$$

זה אומר שהערך של שם עצם תלוי רק בערכים שהמבנה וההשמה נותנים לקבועים ולמשתנים המופיעים בו.

הוכחה. באינדוקציה על יצירת שם העצם t. אם t הוא קבוע אישי c אז לפי הנחת המשפט $\mathsf{c}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}'} = \mathsf{c}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ ומכיוון שלפי הגדרת הערך של שם עצם קיים $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, t) = \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \mathsf{c}) = \mathsf{c}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ וכן $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s, t) = \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s, \mathsf{c}) = \mathsf{c}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}'}$ מתקבל (9).

אם $t = \mathsf{G}(t_1, \ldots, t_n)$ כאשר G קבוע פעולה n-מקומי ו- $t_1, \ldots, t_n$ שמות עצם. לכל $1 \leq i \leq n$, כל קבוע פעולה וכל קבוע אישי המופיע ב-t_i מופיע גם ב-t ולכן קיימות לגבי שם העצם t_i הנחות המשפט. לכן קיים, לפי הנחת האינדוקציה, לכל $1 \leq i \leq n$

$$\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s', t_i) = \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, t_i)\,. \tag{10}$$

לפי הגדרת הערך של שם עצם קיים

$$\begin{aligned} \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, t) &= \mathsf{G}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, t_1), \ldots, \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, t_n)) \\ \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s', t) &= \mathsf{G}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}'}(\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s', t_1), \ldots, \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s', t_n)) \end{aligned} \tag{11}$$

מכיוון שקבוע הפעולה G מופיע ב-t לכן לפי הנחות המשפט $\mathsf{G}^{\mathcal{A}'} = \mathsf{G}^{\mathcal{A}}$, ולכן כתוצאה מ-(01) אגפי ימין של (11) הם שווים ולכן גם אגפי שמאל של (11) הם שווים וקיימת מסקנת המשפט (9).

8.29 הופעות חופשיות ומכומתות של משתנים. תהי $\mathcal{A}$ קבוצה סדורה כלשהי, כלומר שפת $\mathcal{A}$ מכילה את קבוע היחס הדו-מקומי $\prec$, והיחס הדו-מקומי $\prec^{\mathcal{A}}$, שנסמנו ב-$<$, הוא יחס סדר על A. נתבונן בנוסחאות ϕ הבאות:

א. ϕ היא הנוסחה $\forall \mathsf{x} \forall \mathsf{y}(\mathsf{x} \prec \mathsf{y} \to \exists \mathsf{z}(\mathsf{x} \prec \mathsf{z} \wedge \mathsf{z} \prec \mathsf{y}))$. ברור כי $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi) = \mathsf{T}$ אםם יחס הסדר $<$ הוא צפוף, כלומר אם בין כל שני איברים של A נמצא איבר כלשהו של A. לכן במקרה זה $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi)$ אינו תלוי כלל בהשמה s.

ב. ϕ היא הנוסחה $\mathsf{x} \prec \mathsf{y}$. ברור כי $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi) = \mathsf{T}$ אםם $s(\mathsf{x}) < s(\mathsf{y})$, ולכן $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi)$ תלוי בערכים $s(\mathsf{x})$ ו- $s(\mathsf{y})$ ש-s נותנת ל-x ול-y.

ג. ϕ היא הנוסחה $\exists \mathsf{z}(\mathsf{x} \prec \mathsf{z} \wedge \mathsf{z} \prec \mathsf{y})$. ברור כי $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi) = \mathsf{T}$ אםם $s(\mathsf{x}) < s(\mathsf{y})$ וישנם איברי A הנמצאים בין $s(\mathsf{x})$ ו- $s(\mathsf{y})$. לכן $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi)$ תלוי ב- $s(\mathsf{x})$ וב- $s(\mathsf{y})$ אבל אינו תלוי ב- $s(\mathsf{z})$ או בערך אחר כלשהו של s. הסיבה לכך ש- $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi)$ אינו תלוי ב- $s(\mathsf{z})$ היא ש-ϕ אינה מדברת על איבר מסויים המסומן ב-z אלא היא משתמשת ב-z כבמשתנה עזר המאפשר לה להתייחס לאיברים כלשהם. שימוש כזה במשתנה z דומה לגמרי לשימוש ב-z בביטוי $\int_a^b z^2 dz$ שערכו תלוי רק בערכים של a ו-b ולא בערך של z, כי z משמש בו כמשתנה עזר. במקרה של הנוסחה ϕ הנוכחית אנו אומרים כי z הוא משתנה מכומת של ϕ ואילו x ו-y הם משתנים חופשיים של ϕ.

ד. ϕ היא הנוסחה $\mathsf{z} \not\approx \mathsf{x} \wedge \exists \mathsf{z}(\mathsf{x} \prec \mathsf{z} \wedge \mathsf{z} \prec \mathsf{y})$. ערך האמת של ϕ זאת תלוי בערכי ההשמה s עבור y, x ו-z, כי ϕ היא אמיתית בדיוק אז כאשר $s(\mathsf{z}) \neq s(\mathsf{x})$, $s(\mathsf{x}) < s(\mathsf{y})$ וקיימים איברים כלשהם בין $s(\mathsf{x})$ ל- $s(\mathsf{y})$. אם נעקוב אחרי חישוב ערך האמת של ϕ נראה שערך האמת של הרכיב $\mathsf{z} \not\approx \mathsf{x}$ תלוי ב- $s(\mathsf{z})$ בעוד ערך האמת של הרכיב $\exists \mathsf{z}(\mathsf{x} \prec \mathsf{z} \wedge \mathsf{z} \prec \mathsf{y})$ אינו תלוי ב- $s(\mathsf{z})$. מה שקורה כאן הוא שהמשתנה z מופיע במקומות שונים בנוסחה בתפקידים שונים. ברכיב $\mathsf{z} \not\approx \mathsf{x}$ z מסמן איבר מסויים שהרכיב אומר שהוא שונה מן האיבר המסומן ע"י x, ואילו ברכיב $\exists \mathsf{z}(\mathsf{x} \prec \mathsf{z} \wedge \mathsf{z} \prec \mathsf{y})$ z אינו מסמן איבר מסויים אלא הוא מאפשר לנוסחה להתייחס לאיברים כלשהם של A. שימוש כזה של אותו משתנה בשני תפקידים שונים באותה נוסחה בוודאי אינו רצוי בנוסחאות בהן אנו משתמשים למעשה, ותמיד נעדיף להשתמש במקום ב-ϕ בנוסחה כמו $\mathsf{z} \not\approx \mathsf{x} \wedge \exists \mathsf{u}(\mathsf{x} \prec \mathsf{u} \wedge \mathsf{u} \prec \mathsf{y})$ שמשמעותה בדיוק כמשמעות ϕ ואשר בה כל משתנה משמש בתפקיד אחד בלבד, אבל לא נרחיק לכת עד כדי קביעת כללים פורמליים אשר לפיהם הביטוי ϕ אינו נוסחה, כי כללים אלו יסבכו במידה ניכרת את התחביר של תחשיב היחסים.

כעת ניגש להגדרה פורמלית של מושג המשתנה החופשי בנוסחה, כאשר משתנה x נקרא משתנה חופשי בנוסחה אם יש לו הופעה חופשית בנוסחה.

8.30 הגדרה. א. התכונה של משתנה x להיות משתנה חופשי בנוסחה ϕ מוגדרת ברקורסיה על ϕ כדלקמן.
אם ϕ נוסחה אטומית $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)$ אז x חופשי ב-ϕ אם x מופיע באחד משמות העצם t_i.
אם $\phi = \neg\psi$ אז x חופשי ב-ϕ אם הוא חופשי ב-ψ.
אם $\phi = \psi \square \chi$ אז x חופשי ב-ϕ אם הוא חופשי ב-ψ או חופשי ב-χ.
אם $\phi = \mathsf{Q}\mathsf{x}\psi$ אז x אינו חופשי ב-ϕ.
אם $\phi = \mathsf{Q}\mathsf{u}\psi$ ו-u הוא משתנה השונה מ-x אז x חופשי ב-ϕ אם הוא חופשי ב-ψ.
ב. נוסחה ללא משתנים חופשיים נקראת **פסוק**.

8.31 משפט. ערך האמת $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi)$ של נוסחה ϕ תלוי רק בעולם של $\mathcal{A}$, בערכי $\mathcal{A}$ עבור הקבועים המופיעים ב-ϕ, ובערכי ההשמה s עבור המשתנים החופשיים ב-ϕ. ליתר דיוק, אם $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ הם מבנים מתאימים ל-ϕ בעלי עולם A משותף הנותנים את אותם הערכים לקבועים המופיעים ב-ϕ ו-s, s' הן השמות הנותנות את אותם הערכים למשתנים החופשיים ב-ϕ אז $\mathrm{val}(\mathcal{A}', s', \phi) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi)$.

הערה. המשפט הנוכחי אומר שהתלות של ערך האמת של נוסחה ϕ בהשמה היא כזאת שהוא תלוי רק בערכים שההשמה נותנת למשתנים החופשיים של ϕ, ואינו תלוי בערכים אחרים של ההשמה, לרבות ערכים שההשמה נותנת לאותם משתנים מכומתים של ϕ שאינם חופשיים ב-ϕ. במיוחד, אם ϕ היא פסוק, כלומר אם אין לה משתנים חופשיים, אז ערך האמת של ϕ אינו תלוי כלל בהשמה והוא תלוי רק במבנה $\mathcal{A}$. לכן עבור פסוק ϕ נכתוב את ערך האמת של ϕ כ- $\mathrm{val}(\mathcal{A}, \phi)$ וגם כ- $\mathcal{A}(\phi)$, ואם $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{A}'$ הם מבנים

המקיימים את הנחות המשפט ביחס לפסוק ϕ אז קיים $\boldsymbol{\mathcal{A}}'(\phi) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi)$.

הוכחה. באינדוקציה על ϕ.

אם $\phi = \mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)$, היכן ש-R קבוע יחס ו- $t_1, \ldots, t_n$ שמות עצם אז, לפי הגדרת האמת,

$$\begin{aligned} \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \phi) &= \mathsf{R}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, t_1), \ldots, \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, t_n)) \\ \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s', \phi) &= \mathsf{R}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}'}(\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s', t_1), \ldots, \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s', t_n)) \end{aligned} \tag{12}$$

לכל $1 \leq i \leq n$, כל קבוע המופיע ב-t_i מופיע כמובן גם ב-ϕ ולכן, לפי הנחת המשפט, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ו-$\boldsymbol{\mathcal{A}}'$ נותנים את אותם הערכים לקבוע זה, וכן כל משתנה x המופיע ב-t_i הוא חופשי ב-ϕ, לפי הגדרת מושג זה, ולכן, לפי הנחת המשפט, $s'(\mathsf{x}) = s(\mathsf{x})$. כך ראינו שכל ההנחות של משפט 8.28, של תלות הערך של שם עצם, קיימות לכל t_i, ולפי אותו משפט קיים $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s', t_i) = \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, t_i)$ לכל $1 \leq i \leq n$. מכיוון ש-R מופיע ב-ϕ לכן, לפי הנחת המשפט $\mathsf{R}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}'} = \mathsf{R}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$. כך ראינו שהרכיבים המתאימים באגפי ימין של (21) שווים ולכן גם אגפי שמאל שווים וטענת המשפט הוכחה.

אם ϕ מתקבלת ע"י קשר נטפל רק במקרה בו $\phi = \psi_1 \square \psi_2$. עבור $i = 1, 2$, כל קבוע המופיע ב-ψ_i מופיע גם ב-ϕ ולפי הגדרת מושג המשתנה חופשי כל משתנה חופשי ב-ψ_i הוא גם משתנה חופשי ב-ϕ ולכן קיימות לגבי ψ_i הנחות המשפט. לכן לפי הנחת האינדוקציה קיים, עבור $i = 1, 2$, $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s', \psi_i) = \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \psi_i)$. מכאן מתקבלת טענת המשפט ע"י הפעלת לוח האמת של $\square$.

אם $\phi = \forall \mathsf{u} \psi$ אז לפי הגדרת ערך האמת

$$\begin{aligned} \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \phi) &= \min\left\{\mathrm{val}\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s\binom{\mathsf{u}}{a}, \psi\right) \;\middle|\; a \in A\right\} \\ \mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s', \phi) &= \min\left\{\mathrm{val}\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s'\binom{\mathsf{u}}{a}, \psi\right) \;\middle|\; a \in A\right\} \end{aligned} \tag{13}$$

כדי להוכיח שאגפי ימין של השוויונות ב-(31) שווים, ובכך לקבל את טענת המשפט. נוכיח כי

$$\mathrm{val}\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s\binom{\mathsf{u}}{u}, \psi\right) = \mathrm{val}\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}', s'\binom{\mathsf{u}}{a}, \psi\right) \tag{14}$$

היות ולפי הנחת האינדוקציה המשפט נכון עבור ψ לכן עלינו לבדוק אם ההנחות הדרושות קיימות עבור ψ וההשמה $s\binom{\mathsf{u}}{a}$. כל קבוע המופיע ב-ψ מופיע גם ב-ϕ ולכן, לפי הנחת המשפט, הוא מקבל אותו ערך ב-$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ וב-$\boldsymbol{\mathcal{A}}'$. כל משתנה x שהוא חופשי ב-ψ והוא שונה מ-u הוא גם חופשי ב-ϕ ולכן קיים, לפי הנחת המשפט $s(\mathsf{x}) = s'(\mathsf{x})$ ומכאן $s\binom{\mathsf{u}}{a}(\mathsf{x}) = s(\mathsf{x}) = s'(\mathsf{x}) = s'\binom{\mathsf{u}}{u}(\mathsf{x})$. אם $\mathsf{x} = \mathsf{u}$ אז $s\binom{\mathsf{u}}{a}(\mathsf{x}) = a = s'\binom{\mathsf{u}}{a}(\mathsf{x})$. בכך הוכחנו את קיום הנחות המשפט עבור ψ וההשמה $s\binom{\mathsf{u}}{a}$ ולכן קיים (14) והוכחנו את המשפט עבור המקרה $\phi = \forall \mathsf{u} \psi$.

אם $\phi = \exists \mathsf{u} \psi$ אז ההוכחה היא בדיוק כמו עבור $\phi = \forall \mathsf{u} \psi$ בהבדל היחיד שב-(13) יש לקחת max במקום min.

8.32 סימון. אם ϕ היא נוסחה בשפה של מבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ אנו כותבים $\boldsymbol{\mathcal{A}} \models \phi$ כדי לסמן שלכל השמה s ל-A קיים $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \phi) = T$. לאור 13.8 ברור כי אם ϕ היא פסוק אז הערך של אגף שמאל של שוויון זה אינו תלוי בהשמה s.

היות והערך של $\mathrm{val}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, s, \phi)$ תלוי רק בערכים של s עבור המשתנים החופשיים של ϕ לכן איננו צריכים בביטוי זה את ההשמה s כולה ודי לנו בערכיה עבור המשתנים החופשיים של ϕ. כך אם כל המשתנים החופשיים של ϕ הם מבין $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ נוכל לכתוב $\mathrm{val}\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 & ,\ldots, & \mathsf{x}_1 \\ a_1 & ,\ldots, & a_n \end{pmatrix}, \phi\right)$ היכן ש- $\begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 & ,\ldots, & \mathsf{x}_1 \\ a_1 & ,\ldots, & a_n \end{pmatrix}$ היא הפונקציה הנותנת למשתנים $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ את הערכים $a_1, \ldots, a_n$, בהתאמה, ובהקשר הנוכחי אנו מתייחסים לפונקציה זאת כאל השמה כלשהי הנותנת ל- $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ את הערכים $a_1, \ldots, a_n$ וערכיה למשתנים האחרים אינם משמעותיים.